КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ
Физико-технический факультет
Кафедра Электроники и астрофизики

Алимгазинова Н.Ш.

Теоретические основы электротехники

для студентов, обучающихся по специальности
«Промышленная электроника и системы управления»

Алматы, 2025

5 лекция. Связанные цепи

Цель лекции. Изучить физическую сущность взаимной индукции и принципы магнитной связи между электрическими цепями; рассмотреть последовательное и параллельное соединение индуктивно связанных элементов, а также понять основы трансформаторной связи и её применение в электротехнике.

План

1. Виды связи.
2. Индуктивно связанные элементы цепи. Параллельное и последовательное соединения.
3. Расчет связанных цепей.

Электрические цепи *называют* ***связанными****, если при изменениях параметров и физических величин в одной цепи возникает изменение физических величин в другой цепи.*

Связанные цепи бывают с ***внутренней и внешней связью*** (рисунок 1).

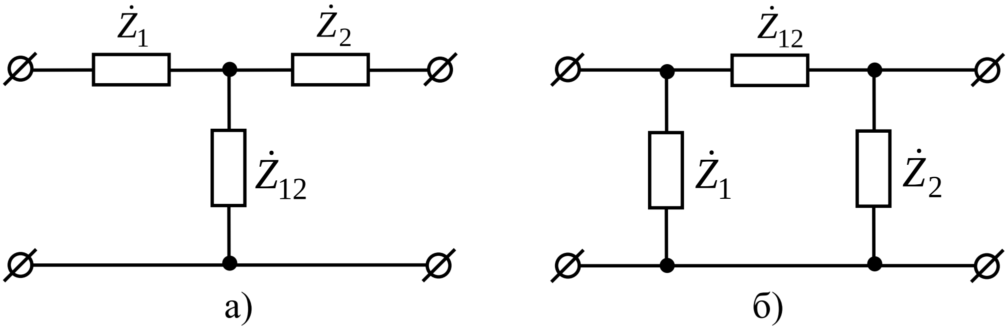


Рисунок 1 – Электрические цепи с внутренней связью (а) и внешней связью (б)

Рассмотрим два связанных контура рисунка 1,а здесь $\dot{Z}_1$ - полное комплексное сопротивление первого контура, $\dot{Z}_2$ - полное комплексное сопротивление второго контура, $\dot{Z}_{12}$ - полное комплексное сопротивление связи. Пусть первый контур характеризуется степенью связи k_1, а второй - k_2. Тогда ***коэффициент связи***

$$k = \sqrt{k_1 k_2} \; . \tag{1}$$

1. Виды связи

В зависимости от того какие элементы цепей связывают между собой разные контура различают следующие ***виды связи***:

- ✓ *магнитная (индуктивный элемент);*
- ✓ *электрическая (емкостной элемент);*
- ✓ *комбинированная (индуктивный и емкостной элементы);*

✓ *гальваническая (резистивный элемент).*

Магнитная связь. *Две или более индуктивных катушек будут **связанными**, если изменения тока одной из катушек вызывает появление ЭДС в остальных.* Например, для двух связанных катушек

$$u_2 = -e_2 = M\frac{di_1}{dt}\ , \qquad (2)$$

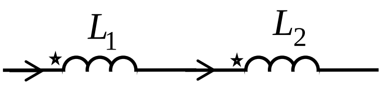
где i_1 - ток первой индуктивной катушки, u_2 - наводимое напряжение второй индуктивной катушки, e_2 - наведенная ЭДС второй индуктивной катушки, M - коэффициент пропорциональности.

*Явление наведения ЭДС в какой-либо индуктивной катушке при изменении тока другой индуктивной катушки называется **взаимоиндукцией**, а наведенная ЭДС – **ЭДС взаимоиндукции.*** В расчётах чаще используется напряжение, компенсирующее эту ЭДС.

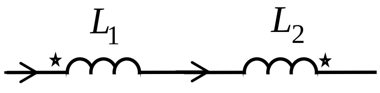
*Коэффициент пропорциональности между током, протекающим по одной индуктивной катушке и магнитным потоком, сцепленным с витками другой индуктивной катушки называется **взаимной индуктивностью** M.* Единица измерения [Гн]. Значение взаимной индуктивности зависит от направления магнитных потоков. Направление магнитного потока в свою очередь зависит от направления намотки катушки, поэтому в схемах следует отмечать разметку начала и концов обмотки (•, Δ, ⭑).

*Если токи в обеих обмотках индуктивных катушек (первой и второй) направлены относительно помеченных зажимов одноименно, то такое включение катушек называется **согласным**, при этом магнитные потоки самоиндукци и взаимной индукции складываются, а* $M > 0$.

*Если токи в обеих обмотках индуктивных катушек (первой и второй) направлены навстречу друг к другу, то такое включение катушек называется **встречным**, при этом* $M < 0$.



а)



б)

Рисунок 2 – Включение индуктивных катушек

На рисунке 1 полная индуктивность первого контура - L_1, а второго контура - L_2. Тогда степень связи k_1 первого контура со вторым представляет собой отношение напряжения на индуктивности второго контура в режиме его холостого хода к полному напряжению на индуктивности первого контура

$$k_1 = \frac{(U_{L2})_{XX}}{U_{L1}}. \qquad (3)$$

Аналогично этому степень связи второго контура

$$k_2 = \frac{(U_{L1})_{XX}}{U_{L2}}. \qquad (4)$$

При магнитной связи коэффициент связи $k = \sqrt{k_1 k_2}$ показывает какая часть магнитного потока одной катушки сцеплена с витками другой катушки. Рассмотрим крайние случаи:

- ✓ Если $k = 1$, тогда связь считается полной, в этом случае магнитный поток одной катушки сцеплен с витками второй катушки.
- ✓ Если $k = 0$, тогда связи между индуктивными катушками нет, в этом случае магнитный поток одной катушки не пересекает витки второй катушки.

Существует понятие «поток рассеяния», она определяется величиной

$$\sigma = 1 - k^2. \qquad (5)$$

При полной связи поток рассеяния $\sigma = 0$, а когда нет связи - $\sigma = 1$.

Магнитная связь может быть ***индуктивной*** *(трансформаторной) или* ***кондуктивной*** *(автотрансформаторной)* (рисунок 3).

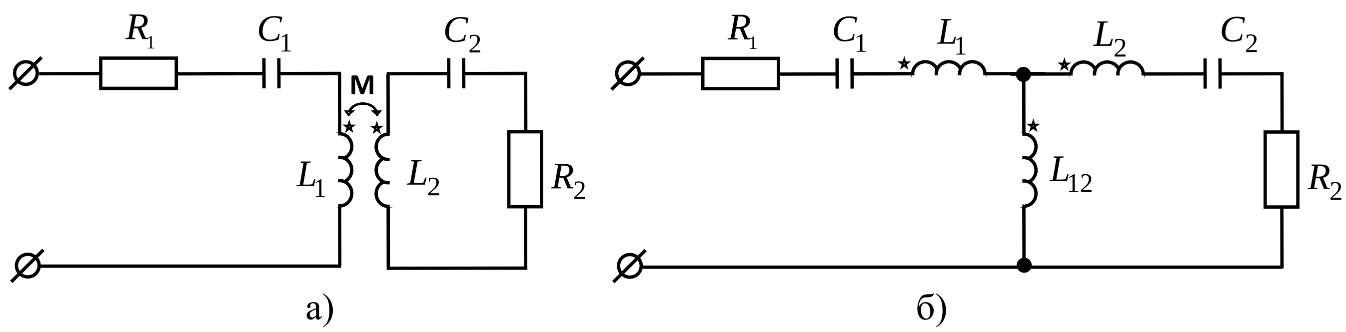


Рисунок 3 – Магнитная связь: индуктивная (трансформаторная) (а) и кондуктивная (автотрансформаторная) (б)

Для индуктивной магнитной связи степень связи первого и второго контуров равны

$$k_1 = \frac{M}{L_1}; \quad k_2 = \frac{M}{L_2}. \qquad (6)$$

Тогда коэффициент связи

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \tag{7}$$

Для кондуктивной магнитной связи степень связи первого и второго контуров равны

$$k_1 = \frac{L_{12}}{L_1 + L_{12}}; \quad k_2 = \frac{L_{12}}{L_2 + L_{12}}. \tag{8}$$

Тогда коэффициент связи

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{L_{12}}{\sqrt{(L_1 + L_{12})(L_2 + L_{12})}}. \tag{9}$$

Электрическая связь. Данный тип связи осуществляется через емкостной элемент и цепи могут быть двух видов связи: ***емкостная внутренняя*** (рисунок 4) *и* ***емкостная внешняя*** (рисунок 5).

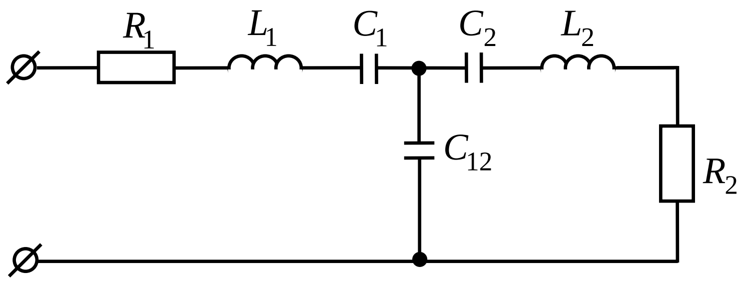


Рисунок 4 – Электрическая связь: емкостная внутренняя

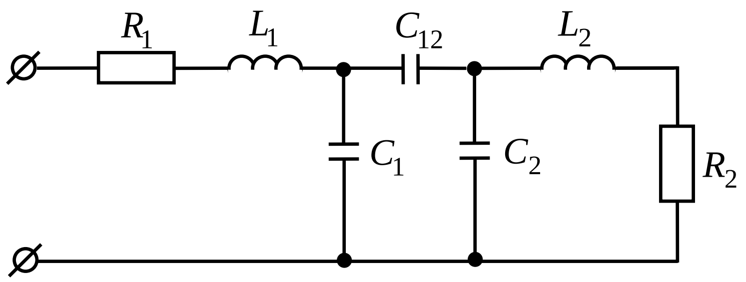


Рисунок 5 – Электрическая связь: емкостная внешняя

Для емкостной внутренней связи степень связи первого и второго контуров равны

$$k_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_{12}}; \quad k_2 = \frac{C_2}{C_2 + C_{12}}. \tag{10}$$

Тогда коэффициент связи

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{\sqrt{(C_1 + C_{12})(C_2 + C_{12})}}. \tag{11}$$

Если введем замену

$$C_{11} = \frac{C_1 C_{12}}{C_1 + C_{12}}, \quad C_{22} = \frac{C_2 C_{12}}{C_2 + C_{12}}, \tag{12}$$

тогда

$$k = \frac{\sqrt{C_{11} C_{22}}}{C_{12}}. \tag{13}$$

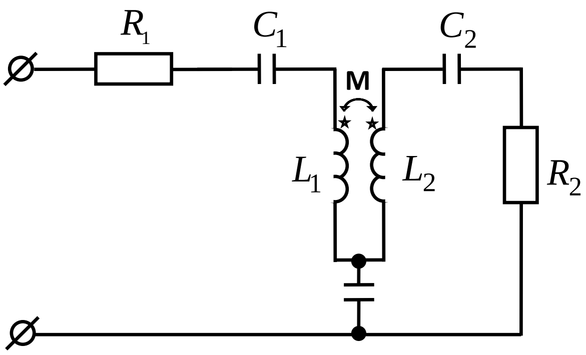
Для емкостной внешней связи степень связи первого и второго контуров равны

$$k_1 = \frac{C_{12}}{C_1 + C_{12}}; \quad k_2 = \frac{C_{12}}{C_2 + C_{12}}. \tag{14}$$

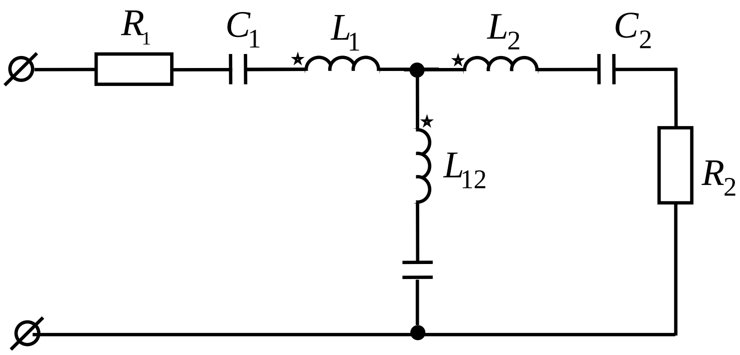
Тогда коэффициент связи

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{C_{12}}{\sqrt{(C_1 + C_{12})(C_2 + C_{12})}}. \tag{15}$$

Комбинированная связь. Данный тип связи осуществляется через емкостной и индуктивный элементы и цепи могут быть двух видов связи: ***индуктивно-емкостная*** *и* ***кондуктивно-емкостная*** (рисунок 6).



а)



б)

Рисунок 6 – Комбинированная связь: емкостная-индуктивная (а) и емкостная-внешняя (б)

Гальваническая связь. Данный тип связи осуществляется через резистивный элемент (рисунок 7).

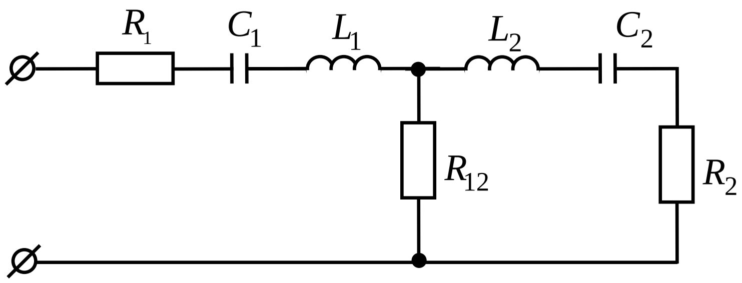


Рисунок 7 – Гальваническая связь

2. Индуктивно связанные элементы цепи. Параллельное и последовательное соединения

Рассмотрим электрические цепи, в которых две индуктивные катушки связаны между собой, в первом случае последовательно, а во-втором случае параллельно.

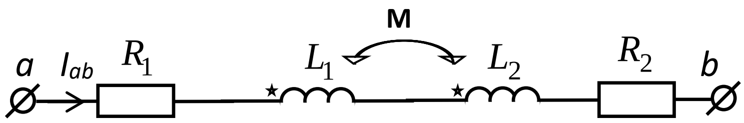


Рисунок 8 – Последовательная индуктивно-связанная цепь

1. Напряжение на участке цепи, представленной на рисунке 8, определяется как

$$u = u_{R1} + u_{L1} + u_{12} + u_{21} + u_{L2} + u_{R2}, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} u_{R1} &= iR_1, \quad u_{L1} = L_1 \frac{di}{dt}, \quad u_{12} = M_{12} \frac{di}{dt}, \\ u_{R2} &= iR_2, \quad u_{L2} = L_2 \frac{di}{dt}, \quad u_{21} = M_{21} \frac{di}{dt}. \end{aligned} \tag{17}$$

Взаимная индуктивность в линейных цепях не зависит от направлений и значений токов, а определяется только конструкцией индуктивных катушек и их взаимным расположением. Следовательно, для одинаковых по конструкции катушек индуктивности справедливо выражение: $M_{12} = M_{21} = M$.

Подставляя (17) в (16) получим

$$u = i\left(R_1 + R_2\right) + \frac{di}{dt}\left(L_1 + L_2 \pm 2M\right). \tag{18}$$

Тогда эквивалентные величины

$$R_{экв} = R_1 + R_2, \qquad L_{экв} = L_1 + L_2 \pm 2M. \tag{19}$$

При согласном включении индуктивных катушек во втором уравнении (16) перед третьим слагаемым будет стоять знак «+», а при встречном включении - знак «–».

Если приложенное напряжение изменяется по некоторому гармоническому закону, тогда уравнения (16) и (17) преобразуется в комплексный вид

$$\dot{U} = \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{L1} + \dot{U}_{12} + \dot{U}_{21} + \dot{U}_{L2} + \dot{U}_{R2}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\dot{U}_{R1} = \dot{I}R_1, \quad \dot{U}_{L1} = \dot{I} \cdot j\omega L_1, \quad \dot{U}_{12} = \dot{I} \cdot j\omega M, \\ &\dot{U}_{R2} = \dot{I}R_2, \quad \dot{U}_{L2} = \dot{I} \cdot j\omega L_2, \quad \dot{U}_{21} = \dot{I} \cdot j\omega M. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь

$$\dot{X}_{L1} = j\omega L_1, \ \dot{X}_{L2} = j\omega L_2 \text{ и } \dot{Z}_M = j\omega M. \tag{22}$$

Подставляя (21) в (20) получим

$$\dot{U} = \dot{I}\left[\left(R_1 + R_2\right) + j\omega\left(L_1 + L_2 \pm 2M\right)\right], \tag{23}$$

тогда

$$\dot{Z} = \left(R_1 + R_2\right) + j\omega\left(L_1 + L_2 \pm 2M\right) = R_{экв} + j\omega L_{экв} = R_{экв} + jx_{экв}. \tag{24}$$

Взаимную индуктивность можно определить экспериментальным способом. Для этого нужно измерить эквивалентную индуктивность при согласном и встречном включении катушек, затем используя формулы

$$L_{согласное} = L_1 + L_2 + 2M, \quad L_{встречное} = L_1 + L_2 - 2M$$

определить взаимную индуктивность как

$$M == \frac{L_{согласное} - L_{встречное}}{4}. \tag{25}$$

2. Используя законы Кирхгофа составим систему уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи рисунка 9

$$\begin{cases} \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2, \\ \dot{U} = \dot{I}_1\dot{Z}_1 + \dot{I}_2\dot{Z}_M, \\ \dot{U} = \dot{I}_2\dot{Z}_2 + \dot{I}_1\dot{Z}_M. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = R_1 + j\omega L_1,$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = R_2 + j\omega L_2\ ,\ \dot{Z}_M = j\omega M\ .$$

Токи в параллельных ветвях цепи

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}\left(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M\right)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2},\quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}\left(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_M\right)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2},\tag{27}$$

тогда полный ток

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}\left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 - 2\dot{Z}_M\right).\tag{28}$$

Отсюда полное комплескное сопротивление цепи

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 - 2\dot{Z}_M}\ .\tag{29}$$

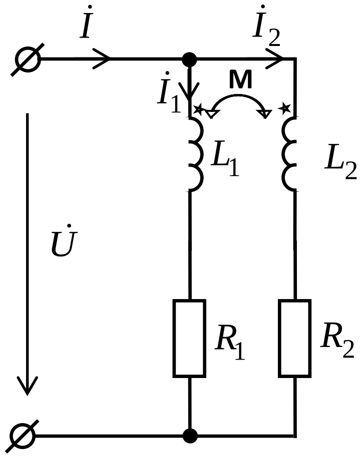


Рисунок 9 – Параллельная индуктивно-связанная цепь

Для определения эквивалентной индуктивности примем, что в цепи отсутствуют потери энергии, т.е. $R_1 = R_2 = 0$, тогда подставляя формулы для комплексных сопротивлений получим

$$L_{экв} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}.\tag{30}$$

При согласном включении индуктивных катушек в уравнении (30) будет стоять знак «–», а при встречном включении - знак «+».

4. Расчет связанных цепей

Рассмотрим индуктивно-связанные контура, ярким примером которых являются – *трансформаторы* (рисунок 10).

Трансформатором *называют статическое электромагнитное устройство, которое состоит из двух или более индуктивно-связанных катушек и предназначено для преобразования напряжения переменного тока без изменения частоты из одного вида в другой вид посредством электромагнитной индукции.*

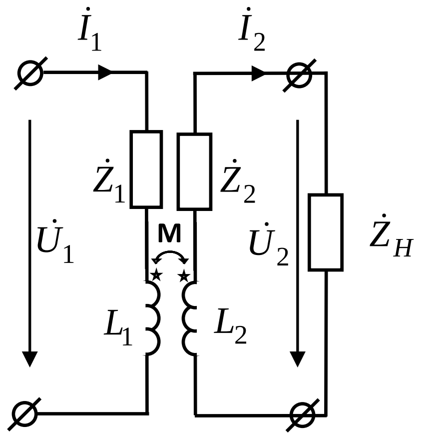


Рисунок 10 – Воздушный трансформатор

Для определения токов в трансформаторе используют следующие методы расчета:

1. с использованием законов Кирхгофа;
2. введением вносимых сопротивлений и индуктивностей;
3. при помощи схем замещения.

1. Для индуктивно-связанных контуров (рисунок 10) уравнения второго закона Кирхгофа имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1\dot{Z}_{11} - \dot{I}_2\dot{Z}_M, \\ 0 = \dot{I}_2\dot{Z}_{22} - \dot{I}_1\dot{Z}_M. \end{cases} \tag{31}$$

Здесь

$$\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_1 + j\omega L_1 = \dot{Z}_1 + jx_1 = R_{11} + jx_{11}^{/} + jx_1 = R_{11} + jx_{11},$$

$$\dot{Z}_{22} = \dot{Z}_2 + j\omega L_2 + \dot{Z}_H = \dot{Z}_1 + jx_2 + \dot{Z}_H = R_{22} + jx_{22}^{/} + jx_2 + R_H + jx_H = R_{22} + jx_{22},$$

$$\dot{Z}_M = j\omega M = jx_M.$$

Из системы уравнений (26) можно определить токи в контурах трансформатора

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 \dot{Z}_{22}}{\dot{Z}_{11}\dot{Z}_{22} - \dot{Z}_M^2}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1 \dot{Z}_{11}}{\dot{Z}_{11}\dot{Z}_{22} - \dot{Z}_M^2}. \tag{32}$$

Данный метод расчета токов удобен только для анализа простых по структуре трансформаторов, например для воздушных трансформаторов. Для более сложных магнитных устройств система уравнений, составленная по законам Кирхгофа, имеет более сложный вид.

2. Рассчитать работу трансформатора можно при помощи введения вносимых величин. Такой метод осуществляется путем преобразования двухконтурной схемы в одноконтурную (рисунок 11). В этом случае две индуктивные катушки рассматриваются в одноконтурной схеме несвязанными.

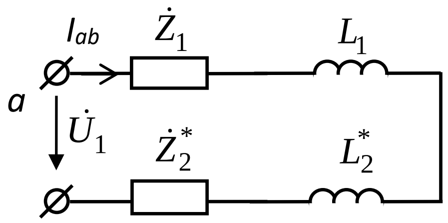


Рисунок 11 – Одноконтурная схема трансформатора

Для одноконтурной схемы справедливо уравнение

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1\left(\dot{Z}_{11} + \dot{Z}_{22}^*\right), \tag{33}$$

где $\dot{Z}_{22}^* = \dot{Z}_2^* + j\omega L_2^* = R_2^* + jx_2^*$ - вносимое комплексное сопротивление.

Для определения вносимых величин преобразуем первое уравнение (32) в следующий вид

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_{11} - \dot{Z}_M^2 / \dot{Z}_{22}}. \tag{34}$$

Из уравнения (33) получим

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_{11} + \dot{Z}_{22}^*}. \tag{35}$$

При сопоставлении (34) и (35) определим вносимое комплексное сопротивление

$$\dot{Z}_{22}^* = -\dot{Z}_M^2 / \dot{Z}_{22}. \tag{36}$$

Путем преобразований уравнения (36)

$$R_2^* = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + x_{22}^2} R_{22} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}^2} R_{22}; \tag{37}$$

$$x_2^* = -\frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + x_{22}^2} x_{22} = -\frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}^2} x_{22}. \tag{38}$$

Также формулу (37) можно определить из условия равенства мощностей во втором контуре.

Подставляя данные уравнения в (35) можно определить ток в одноконтурной схеме трансформатора. С физической точки зрения вносимое сопротивление представляет собой такое сопротивление, которое включено последовательно с первичной обмоткой и позволяющее учесть влияние тока нагрузки $\dot{I}_2$ на ток $\dot{I}_1$.

3. Для трансформатора, представленного на рисунке 10 (без учета сопротивления нагрузки), соответствует схема замещения, изображенная на рисунке 12.

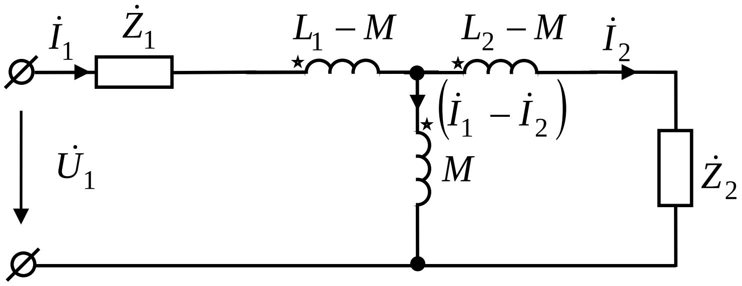


Рисунок 12 – Т-образная схема замещения воздушного трансформатора

При составлении системы уравнений по законам Кирхгофа для данной Т-образной схемы можно получить систему уравнений (31). Данная схема замещения позволяет рассчитать токи в контурах трансформатора.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение связанным контурам.
2. Опишите основные виды связи.
3. Запишите формулы эквивалентных величин при последовательном и параллельном соединении индуктивно-связанных элементов.
4. Опишите трансформаторный вид связи.

Литература

1 Алимгазинова Н.Ш. Теория Электрических Цепей. Курс Лекций. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 8,7 п.л..

2 Манаков С.М., Алимгазинова Н.Ш., Бурисова Д.Ж., Исимова А.Т. Основы электротехники в упражнениях и задачах. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. –10 п.л..

3 Манаков С.М., Алимгазинова Н.Ш., Толегенова А.А. Учебно-Методическое Пособие По Курсу "Теория Электрических Цепей". – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 12 п.л.

4 Теоретические основы электротехники. Версия 1.0 [Электронный ресурс]: конспект лекций / С. Г. Иванова, В. В. Новиков. – Электрон. дан. (4 Мб). – Красноярск: ИПК СФУ, 2008.

5 Атабеков Г. И. Основы теории цепей : учебник / Г. И. Атабеков . – 2-е изд., испр . – СПб. : Лань, 2006 . – 432 с.

6 Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники. М: КОРОНА-Век, 2012. - 368 с.

7 Атабеков Г.И. Нелинейные электрические цепи. Теоретические основы электротехники. Учебное пособие. СПб.: Питер, Лань, 2010. – 432 с.

8 Бессонов Л.А. Электрические цепи. Теоретические основы электротехники. М: Юрайт, 2016. – 701 с.

9 Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для студ. вузов спец. Радиотехника. – М.: Высшая школа, 2000. – 574 с.